



ECOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL,
ECOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS,
ESPCI PARIS, SUOPTIQUE, ENAC.

Admission par voie universitaire

EPREUVES de MATHÉMATIQUES et de PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tous documents (dictionnaires, imprimés, ...) ou de tous appareils (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.

Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes.

Dans toutes les questions vous indiquerez les assertions correctes. Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.

Toute réponse incorrecte sera pénalisée.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage des cases du document réponse.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

L'énoncé de cette épreuve comporte 18 pages de texte.



QCM de Mathématiques

Questions 1 à 20

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 7x + \log(2x - 5)$ pour $x \in \mathbb{I} = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$.
- A. f est concave sur \mathbb{I} .
 - B. f est convexe sur \mathbb{I} .
 - C. f présente un maximum global sur \mathbb{I} en $x = 3$.
 - D. f présente un maximum global sur \mathbb{I} en $x = 4$.
 - E. L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur \mathbb{I} .

2. Soit $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + \log(1 + 2x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right[,$$

et $g(x)$ la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2}, \quad x \in \left] -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right[.$$

- A. Les courbes représentatives de f et de g ont la même tangente au point d'abscisse $x = 0$.
- B. La courbe représentative de f est au-dessus de la courbe représentative de g au voisinage du point d'abscisse 0.
- C. La courbe représentative de f est au-dessus de la parabole d'équation $y = 1 + 2x - 3x^2$, au voisinage du point d'abscisse 0.
- D. La courbe représentative de g est au-dessus de la parabole d'équation $y = 1 + 2x + 3x^2$, au voisinage du point d'abscisse 0.
- E. Soit $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, le produit des fonctions f et g . Alors, $(h)'''(0) > 10$.

3. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1}$, pour $x \neq -1, x \neq 1$, $f(-1) = 2$ et $f(1) = 0$, alors :

- A. f est continue en -1 .
- B. f est dérivable en -1 .
- C. f est continue en 1.
- D. f est dérivable en 1.
- E. f est une fonction affine sur $[1; +\infty[$.

8. On considère la série $\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

- A. Cette série diverge vers $-\infty$.
- B. Cette série diverge sans avoir de limite.
- C. Cette série converge et la somme est négative.
- D. Cette série converge et la somme est positive.
- E. Cette série converge et la somme de cette série est $\leq \frac{3}{4}$.

9. On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n^2 + 4n + 3}\right)$.

- A. Cette série diverge vers $+\infty$.
- B. Cette série converge et sa somme est $\leq \frac{1}{2}$.
- C. Cette série converge et sa somme est $\geq \frac{1}{4}$.
- D. La série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n}$ diverge.
- E. La série $\sum_{n \geq 0} (u_n)^{\frac{2}{3}}$ diverge.

10. Afin de promouvoir un produit, une entreprise décide d'effectuer de la publicité via les trois médias suivants :

- presse magazine,
- Internet,
- tracts publicitaires par voie postale.

Parmi tous les utilisateurs ayant vu la publicité une fois, on considère que 20% l'ont vu dans le magazine, 50% sur Internet, et 30% par voie postale.

On sait que :

- la publicité dans le magazine mène à un achat avec une probabilité de 5%,
- la publicité sur Internet mène à un achat avec une probabilité de 12%,
- la publicité par voie postale mène à un achat avec une probabilité de 1%.

On choisit un utilisateur au hasard.

- A. Il y a une probabilité d'au moins 95% qu'il n'achète pas le produit.
- B. Il y a une probabilité d'au moins 7% qu'il achète le produit.
- C. S'il achète le produit, il y a une probabilité d'au moins 15% que ce soit en ayant vu la publicité dans la presse magazine.
- D. S'il achète le produit, il y a au moins trois fois plus de chances que ce soit en ayant vu la publicité dans la presse magazine que sur des tracts reçus par voie postale.

14. On considère les séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2^n}{n^2} \right) x^n, \quad (1)$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{n! + 2^n} \right) x^n, \quad (2)$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^2 2^n} \right) x^n. \quad (3)$$

- A. Le plus petit des trois rayons de convergence est 2.
 B. Le plus grand des trois rayons de convergence est 2.
 C. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$.
 D. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in]0; \frac{1}{2}[$.
 E. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$.

15. Soit n un entier naturel. Soit l'intégrale $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$.

- A. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 B. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 C. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
 D. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geq \frac{e^2}{n+3}$.
 E. $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 0$.

16. Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2; y \geq 0, \text{ et } xy \leq 1\}$. Soit $I = \iint_D y^2 x \, dx dy$.

- A. $I \leq \frac{1}{2}$.
 B. $I \geq \frac{1}{3}$.
 C. $I = \int_1^2 \frac{1}{3t^2} dt$.
 D. $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} (1 - t^2) dt$.
 E. $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} (\frac{5}{4} - t^2) dt$.

14. On considère les séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2^n}{n^2} \right) x^n, \quad (1)$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{n! + 2^n} \right) x^n, \quad (2)$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^2 2^n} \right) x^n. \quad (3)$$

- A. Le plus petit des trois rayons de convergence est 2.
 B. Le plus grand des trois rayons de convergence est 2.
 C. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$.
 D. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in]0; \frac{1}{2}[$.
 E. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$.

15. Soit n un entier naturel. Soit l'intégrale $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$.

- A. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 B. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 C. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
 D. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geq \frac{e^2}{n+3}$.
 E. $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 0$.

16. Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2; y \geq 0, \text{ et } xy \leq 1\}$. Soit $I = \iint_D y^2 x \, dx dy$.

- A. $I \leq \frac{1}{2}$.
 B. $I \geq \frac{1}{3}$.
 C. $I = \int_1^2 \frac{1}{3t^2} dt$.
 D. $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} (1 - t^2) dt$.
 E. $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} (\frac{5}{4} - t^2) dt$.

20. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2xy = x$ pour tout x réel.
- A. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - B. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - C. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - D. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.
 - E. Toute fonction f solution de (E) , admet un maximum global sur \mathbb{R} .

FIN de l'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES

23. On donne ci-dessous les quatre premières lignes de la classification périodique de Mendeleiev :

1	1.0079 H Hydrogène	2	4.0026 He Hélium
3	6.941 Li Lithium	4	9.0122 Be Béryllium
11	22.990 Na Sodium	12	24.305 Mg Magnésium
19	39.098 K Potassium	20	40.078 Ca Calcium
		21	44.956 Sc Scandium
		22	47.88 Ti Titane
		23	50.942 V Vanadium
		24	51.996 Cr Chrome
		25	54.938 Mn Manganèse
		26	55.845 Fe Fer
		27	58.933 Co Cobalt
		28	58.933 Ni Nickel
		29	63.546 Cu Cuivre
		30	65.38 Zn Zinc
		31	69.723 Ga Gallium
		32	72.64 Ge Germanium
		33	74.922 As Arsenic
		34	75.94 Se Sélénium
		35	79.904 Br Brome
		36	83.8 Kr Krypton
		37	85.46 Rb Rubidium
		38	87.62 Sr Strontium
		39	89.904 Y Yttrium
		40	91.224 Zr Zirconium
		41	92.906 Nb Niobium
		42	95.94 Mo Molybdène
		43	97.90 Tc Technétium
		44	101.07 Ru Ruthénium
		45	102.90 Rh Rhodium
		46	106.42 Pd Paladium
		47	107.86 Ag Argent
		48	112.41 Cd Cadmium
		49	114.90 In Indium
		50	118.69 Sn Étain
		51	121.75 Sb Antimoine
		52	127.60 Te Tellure
		53	127.60 I Iode
		54	126.90 Xe Xénon
		55	132.90 Ba Baryum
		56	137.33 La Lanthane
		57	140.90 Ce Cérium
		58	140.90 Pr Praseodyme
		59	144.90 Nd Néodyme
		60	147.07 Pm Prométhée
		61	150.36 Sm Samarium
		62	151.96 Eu Europée
		63	157.25 Gd Gadolinium
		64	162.50 Tb Terbium
		65	164.93 Dy Dysprosium
		66	167.26 Ho Holmium
		67	168.93 Er Erbium
		68	173.04 Tm Thulium
		69	175.04 Yb Ytterbium
		70	176.43 Lu Lutécium
		71	177.05 Hf Hafnium
		72	180.94 Ta Tungstène
		73	183.84 W Wolfram
		74	186.21 Re Rhenium
		75	186.21 Os Osmium
		76	190.23 Ir Iridium
		77	192.22 Pt Platine
		78	197.04 Au Or
		79	198.91 Hg Mercure
		80	200.59 Tl Thallium
		81	204.38 Pb Plomb
		82	207.2 Bi Bismuth
		83	208.98 Po Polonium
		84	209 At Astatoïde
		85	210 Fr Francium
		86	210 Ra Radium
		87	222 Ac Actinide
		88	226 Th Thorium
		89	232 Pa Protactinium
		90	238 U Uranium
		91	238 Np Neptunium
		92	244 Pu Plutonium
		93	247 Am Americium
		94	251 Cm Curium
		95	254 Bk Berkélium
		96	259 Cf Californium
		97	262 Es Einsteinium
		98	266 Fm Fermium
		99	269 Md Mendelevium
		100	271 No Néhenium
		101	274 Lr Lawrencium

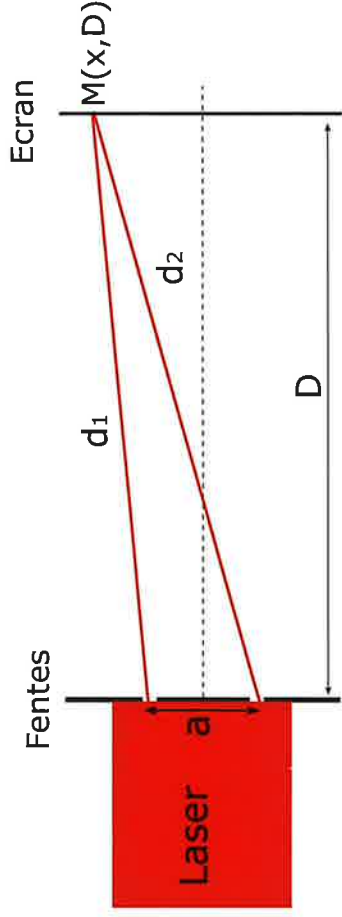
- A. L'oxygène possède deux électrons de coeur et 6 électrons de valence.
- B. La configuration électronique du Scandium est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3$.
- C. La configuration électronique du Fer est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$.
- D. Le remplissage des couches électroniques suit la règle de Klechkowski.
- E. Il est possible d'obtenir à partir de la classification périodique la configuration électronique des atomes neutres électriquement ainsi que leurs ions en retirant et/ou ajoutant un ou plusieurs électrons.
24. La loi de Planck caractérisant le rayonnement thermique donne la densité spectrale d'énergie électromagnétique d'un corps noir $\rho(\nu, T)$ pour une fréquence ν et à la température T . Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide, h la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann. Une conséquence de cette loi est la loi de Wien donnant la longueur d'onde maximale d'un corps noir pour une température donnée : $\lambda_{max} = \frac{A}{T}$ avec $A = 2.898 \mu m.K$.

- A. L'unité de $\rho(\nu, T)$ est le $J.m^{-3}.Hz^{-1}$.
- B. La valeur de la constante de Boltzmann est $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} J.K$.
- C. Si $T = 300K$, un corps noir émet majoritairement dans le spectre infrarouge.
- D. La densité d'énergie électromagnétique $\rho(\nu, T)$ est une fonction continue ayant pour origine la quantification de l'énergie d'un rayonnement électromagnétique.
- E. La température de surface du Soleil, siège de fortes réactions nucléaires, est d'environ seulement 6000K.

27. Le dispositif interférométrique des fentes d'Young est représenté sur la figure ci-dessous.



Un laser de longueur d'onde λ éclaire deux fentes séparées d'une distance a et la figure d'interférences est observée sur un écran placé à une distance D des fentes.

A. La différence de marche δ entre les deux trajets au point $M(x, D)$ sur l'écran

$$\text{est égale à } \delta = d_2 - d_1 = D \left[\sqrt{1 + \frac{(x + a/2)^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x - a/2)^2}{D^2}} \right].$$

B. Au niveau de l'écran, l'interfrange i est donné par $i = \frac{aD}{\lambda}$.

C. Si le champ électrique au point M s'écrit $E(M) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, l'intensité mesurée sur l'écran sera $I(M) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.

D. Les franges d'interférences seront plus espacées pour un laser bleu que pour un laser rouge.

E. Un laser étant une source cohérente, il est évidemment possible de réaliser cette expérience avec deux lasers différents mais de même longueur d'onde.

28. Toutes les propositions ci-dessous sont liées au second principe de la thermodynamique, lesquelles sont vraies ?

A. Au cours d'une transformation, l'entropie échangée avec l'extérieur peut être négative.

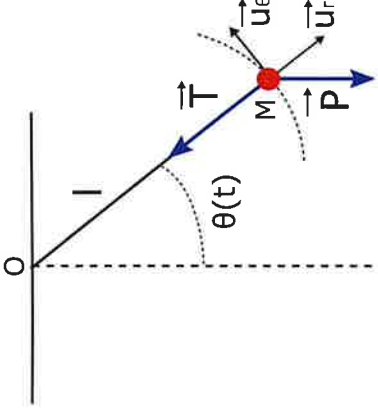
B. L'unité de l'entropie est le J/K .

C. L'entropie est une grandeur intensive.

D. Au cours d'une transformation irréversible, l'entropie de création d'un système est positive.

E. L'entropie d'un système isolé est nulle puis qu'il n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.

31. On considère le pendule simple représenté sur la figure ci-dessous. Nous nous intéressons au mouvement du point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen.



La longueur du fil du pendule est notée l . Le point matériel M est soumis à deux forces, le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} et son mouvement sera décrit en coordonnées polaires (r, θ) dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

La longueur du fil étant fixe, le mouvement du point M sera uniquement caractérisé par la connaissance de $\theta(t)$ dont l'évolution est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2\theta(t) = 0.$$

On notera g l'accélération de la pesanteur et T la norme de la force de tension du fil.

- A. Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$a_r = -\frac{T}{m} + g \cos \theta,$$

$$a_\theta = -g \sin \theta.$$

- B. La pulsation propre ω_0 des oscillations est égale à $\frac{g}{l}$.

- C. A l'instant $t = 0$, le pendule est lâché avec la condition initiale $\theta(0) = -\theta_0$, la solution de l'équation différentielle est alors harmonique avec $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$.

- D. Le référentiel étant Galiléen, l'équation différentielle pour $\theta(t)$ est valide en toutes conditions.

- E. En coordonnées polaires, nous avons $\vec{OM} = l\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = l\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta$.

34. On s'intéresse à la diffraction d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ par un réseau de diffraction en transmission de période a . On rappelle que la direction θ_k des ordres diffractés est donnée par la relation fondamentale des réseaux :

$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda}{a},$$

où k est un entier relatif caractérisant l'ordre diffracté, θ_0 est l'angle d'incidence et on considère que le milieu de propagation de part et d'autre du réseau est l'air.

- A. L'étude de la diffraction dans l'ordre zéro permet d'analyser une lumière polychromatique.
- B. En incidence normale, pour $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ et $a = 1 \mu\text{m}$, l'angle diffracté pour l'ordre $k = +3$ est égal à 90° .
- C. En incidence normale, 7 ordres diffractés peuvent être observés pour $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ et $a = 1.5 \mu\text{m}$.
- D. Si le réseau est éclairé en lumière blanche, il est possible que des ordres diffractés se recouvrent spatialement si la période a du réseau est trop faible.
- E. Un réseau étant une structure périodique, sa fréquence spatiale fondamentale est égale à $\frac{1}{a}$.

35. Dans le vide et loin de toute source de charge ou de courant, les équations de Maxwell pour les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, & \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

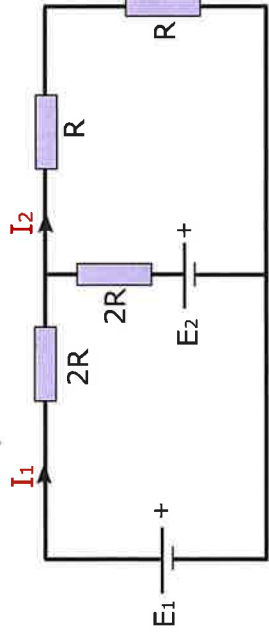
On considère qu'au point quelconque \vec{r} de l'espace, le champ électromagnétique est de la forme : $\vec{E}(\vec{r}, t) = f(z)e^{-\alpha t} \vec{u}_x$ et $\vec{B}(\vec{r}, t) = g(z)e^{-\alpha t} \vec{u}_y$, avec α un coefficient réel.

- A. Les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ correspondent à ceux d'une onde progressive.
- B. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ vérifie bien l'équation de Maxwell Gauss.
- C. Nous avons la relation $f(z) = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \alpha} \frac{dg(z)}{dz}$.
- D. Nous avons la relation $g(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{df(z)}{dz}$.
- E. Dans le cas le plus général possible, nous avons $f(z) = A \cos(\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \alpha} z) + B \sin(\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \alpha} z)$, où A et B sont des constantes d'intégrations dépendant des conditions aux limites appliquées sur les champs.

38. On considère une distribution de charges sphérique de rayon a de centre Q . La charge totale de cette sphère est notée Q . On note r la distance mesurée par rapport au centre de la sphère.

- A. Pour $r \geq a$ et une répartition volumique de charges, le champ électrique créé par la sphère est $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.
- B. Pour $r < a$ et une répartition volumique de charges de densité uniforme, le champ électrique créé par la sphère est $E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$.
- C. Pour $r < a$ et une répartition volumique de charges de densité $\rho(r)$, le champ électrique créé par la sphère est $E(r) = \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$.
- D. Pour $r \geq a$ et une densité surfacique uniforme de charges σ , le champ électrique créé par la sphère est $E(r) = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 r^2}$.
- E. Pour $r < a$ et une densité surfacique uniforme de charges σ , le champ électrique créé par la sphère est $E(r) = \frac{4\pi r^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

39. On s'intéresse au circuit électrique ci-dessous :



- A. Nous avons $I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 - E_2}{6R}$.
- B. Nous avons $I_1 = \frac{2E_2 - E_1}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_2 - E_1}{6R}$.
- C. Nous avons $I_1 = \frac{2E_2 - E_1}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 + E_2}{6R}$.
- D. Nous avons $I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 + E_2}{6R}$.
- E. Nous avons $I_1 = \frac{2E_2 - E_1}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 - E_2}{6R}$.

